Математика **Л-230911** **10.02.2024**

Урок №90

Тема: Шар и сфера, их сечения

Срок сдачи работ до 11.02.2024

Теоретическая часть:

Глоссарий по теме

Окружность – множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Данная точка называется **центром** окружности, расстояние от центра до любой точки окружности называется **радиусом** окружности.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.

Сфера – это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, которую называют **центром**

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром.**

Шар можно описать и иначе. **Шаром** радиуса R с центром в точке O называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая O), и не содержит других точек.

Уравнение сферы

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ – уравнение сферы радиуса R и центром $C(x_0; y_0; z_0)$.

Определение

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью к сфере,** а их общая точка – **точкой касан**

Сегмент шара - это часть шара, которая отсекается от шара секущей плоскостью. **Основой сегмента** называют круг, который образовался в месте сечения. **Высотой сегмента** h называют длину перпендикуляра проведенного с середины основы сегмента к поверхности сегмента.

Сектором называется часть шара, ограниченная совокупностью всех лучей, исходящих из центра шара O и образующих круг на его поверхности с радиусом r.

Основная литература:

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни – М. : Просвещение, 2014. – 255, сс. 136-142.

Открытые электронные ресурсы:

Образовательный портал "Решу ЕГЭ". https://mathb-ege.sdamgia.ru/test?theme=177

Теоретический материал для самостоятельного изучения

1. Основные теоретические факты

По аналогии с окружностью сферу рассматривают как множество всех точек, равноудалённых от заданной точки, но только всех точек не плоскости, а пространства.

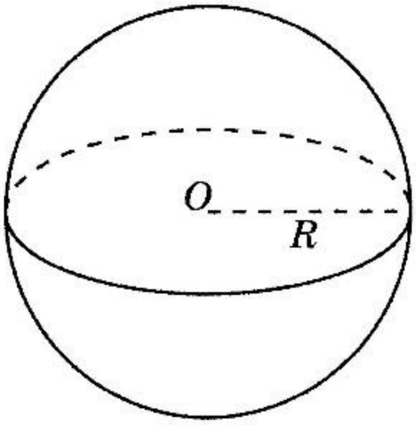

Рисунок 1 – Сфера с центром в точке O и радиусом R

Данная точка O называется **центром** сферы, а заданное расстояние – **радиусом** сферы (обозначается R). Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, называется **диаметром** (обозначается D). D=2R.

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, которую называют **центром**.

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром.**

Шар можно описать и иначе. **Шаром** радиуса R с центром в точке O называется тело, которое содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая O), и не содержит других точек.

Сферу можно получить ещё одним способом - вращением полуокружности вокруг её диаметра, а шар – вращением полукруга вокруг его диаметра.

2. Уравнение сферы

Прежде чем вывести уравнение сферы введем понятие уравнения поверхности в пространстве. Для этого рассмотрим прямоугольную систему координат Oxyz и некоторую поверхность F. Уравнение с тремя переменными x, y, z называется уравнением поверхности F, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют координаты никакой другой точки.

Пусть сфера имеет центром точку C (x_0; y_0; z_0) и радиус R. Расстояние от любой точки M (x; y; z) до точки C вычисляется по формуле:

MC=$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

Исходя из понятия уравнения поверхности, следует, что если точка M лежит на данной сфере, то MC=R, или $MC^2=R^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Это выражение называют уравнением сферы радиуса R и центром C(x_0; y_0; z_0).

3. Взаимное расположение сферы и плоскости

Взаимное расположение сферы и плоскости зависит от соотношения между радиусом сферы R и расстояния от центра сферы до плоскости d.

1. Пусть $d<R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, тогда сфера и плоскость пересекаются, и сечение сферы плоскостью есть окружность.

2. Пусть $d=R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы тогда сфера и плоскость имеют только одну общую точку, и в этом случае говорят, что плоскость касается сферы.

3. Пусть $d>R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Рассмотрим случай касания более подробно.

Определение

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания.

Теорема (свойство касательной плоскости).

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Теорема (признак касательной плоскости):

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащей на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

4. Основные формулы

Соотношение между радиусом сферы, радиусом сечения и расстоянием от центра сферы до плоскости сечения:

$R^2 = h^2 + r^2$

Формула для вычисления площади поверхности сферы и ее элементов:

$S=4\pi R^2$ – площадь сферы.

$S = 2\pi Rh$ – площадь поверхности сегмента сферы радиуса R с высотой h.

$S = \pi Rh(2h + \sqrt{2hR - h^2}$ – площадь поверхности сектора с высотой h.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

1. Площадь сечения шара, проходящего через его центр, равна 9 кв. м. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:

Площадь круга вычисляется по формуле: $S_{кр}=\pi R^2$.

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле: $S_{сф}=4\pi R^2$. Радиус шара и радиуса сечения, проходящего через центр шара, одинаковые. Поэтому площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его диаметрального сечения. То есть площадь поверхности шара равна 36.

Ответ: 36

2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5.

Решение:

Площадь сферы равна $S_{сф}=4\pi R^2$. То есть $S_{сф}=100\pi$.

По условию площадь круга некоторого радиуса r также равна 100π. Значит, $r^2=100$, то есть $r=10$.

Ответ: 10.

3. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB=13, BC=14, CA=15

Решение:

Окружность, вписанная в треугольник, является сечением сферы.

Найдем ее радиус.

Площадь треугольника с известными сторонами можно вычислить по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p=0,5(AB+BC+AC)=21

$$S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=7\cdot 3\cdot 4$$

S=84.

С другой стороны, $S=p\cdot r$.

Отсюда r=4.

Теперь найдем расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Используем соотношение:

$$R^2=h^2+r^2$$

$h^2 = R^2 - r^2$

$h^2 = 25 - 16 = 9$

h=3.

Ответ: 3.

4. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10. Найти расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16.

Решение:

Так как вершины прямоугольника лежат на сфере, то окружность, описанная около прямоугольника, является сечением сферы.

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали, то есть r=8.

По условию задачи R=10.

Используем соотношение:

$R^2 = h^2 + r^2$

$h^2 = R^2 - r^2$

$h^2 = 100 - 64 = 36$

h=6.

Ответ: 6.

Домашнее задание

1. Составить конспект теоретического материала.
2. Задания тренировочного модуля записать в тетрадь, сопроводив его соответствующими ЧЕРТЕЖАМИ к каждой задаче!